Mais où sont les points de Lagrange ?

Alain Brémond

Septembre 2021

Un peu d’histoire

- Les lois de la gravitation de Newton expliquaient très bien les relations physiques entre deux corps célestes.
- Mais qu’en était-il avec plus de deux corps exerçant leurs forces de gravitation les uns sur les autres ; ces corps étant en mouvement ?
- Lagrange (1736-1813) s’intéressa au problème, obtint le prix de l’Académie des Sciences de Berlin en 1772 pour la solution du problème des trois corps.
- D’où vient la découverte des points dits de Lagrange.

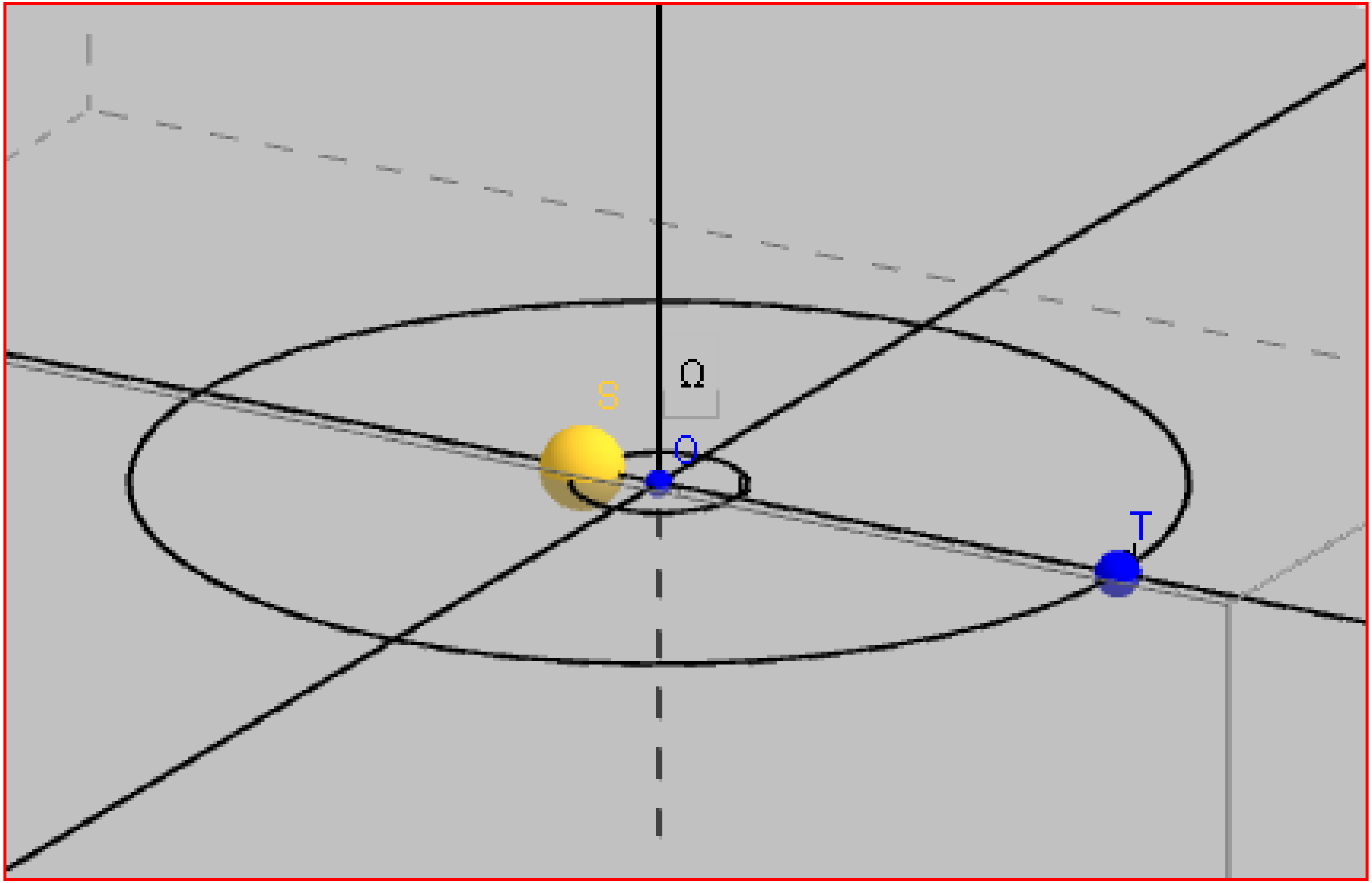
Position du problème

Soit deux corps massifs **S** et **T** avec S > T et T en orbite autour de S.

En réalité S et T tournent autour de leur centre de masse.

Les mouvements se font dans le plan contenant les orbites.

Système de coordonnées de Cros



Calcul du barycentre Soleil-Terre:

- Par définition on a :
  - Ms X distance S au barycentre = Mt X distance T au barycentre
- Ce qui donne :
  - Terre à 149 597 426 854 m du barycentre
  - Soleil à 449 146 m du barycentre
- Vitesse angulaire u système :
  - $\omega^2 = G\ M/\ R^3$
  - Vitesse angulaire: $1.99\ 10^{-7}$ rad/s

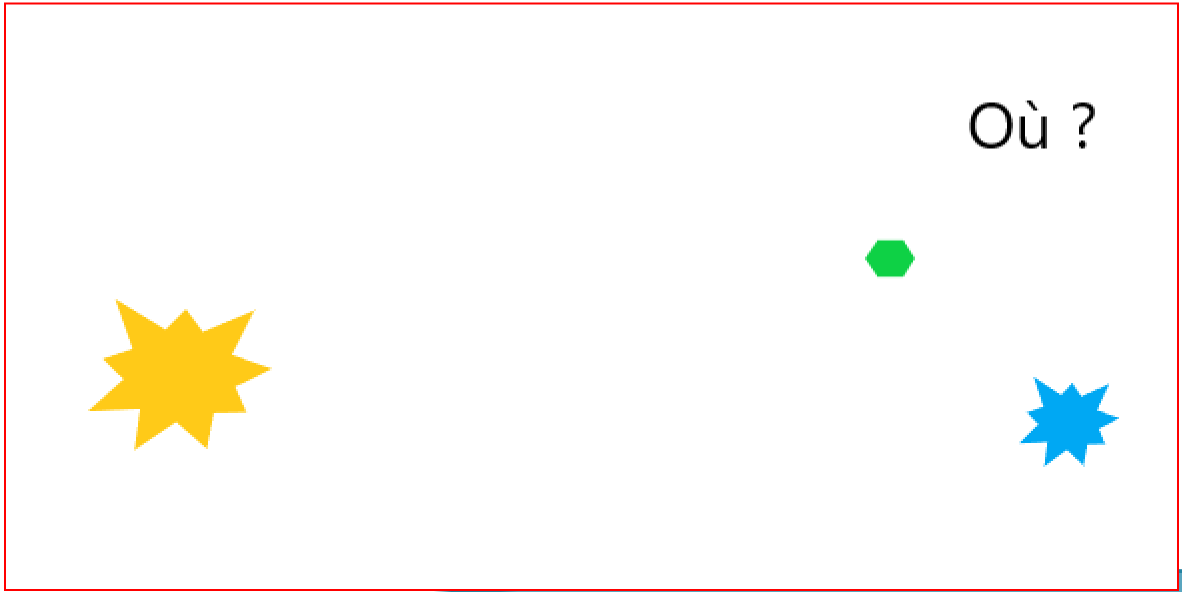
Le barycentre est très près du centre du Soleil
(la distance Terre-Soleil n’est pas à l’échelle)

On rajoute un troisième corps

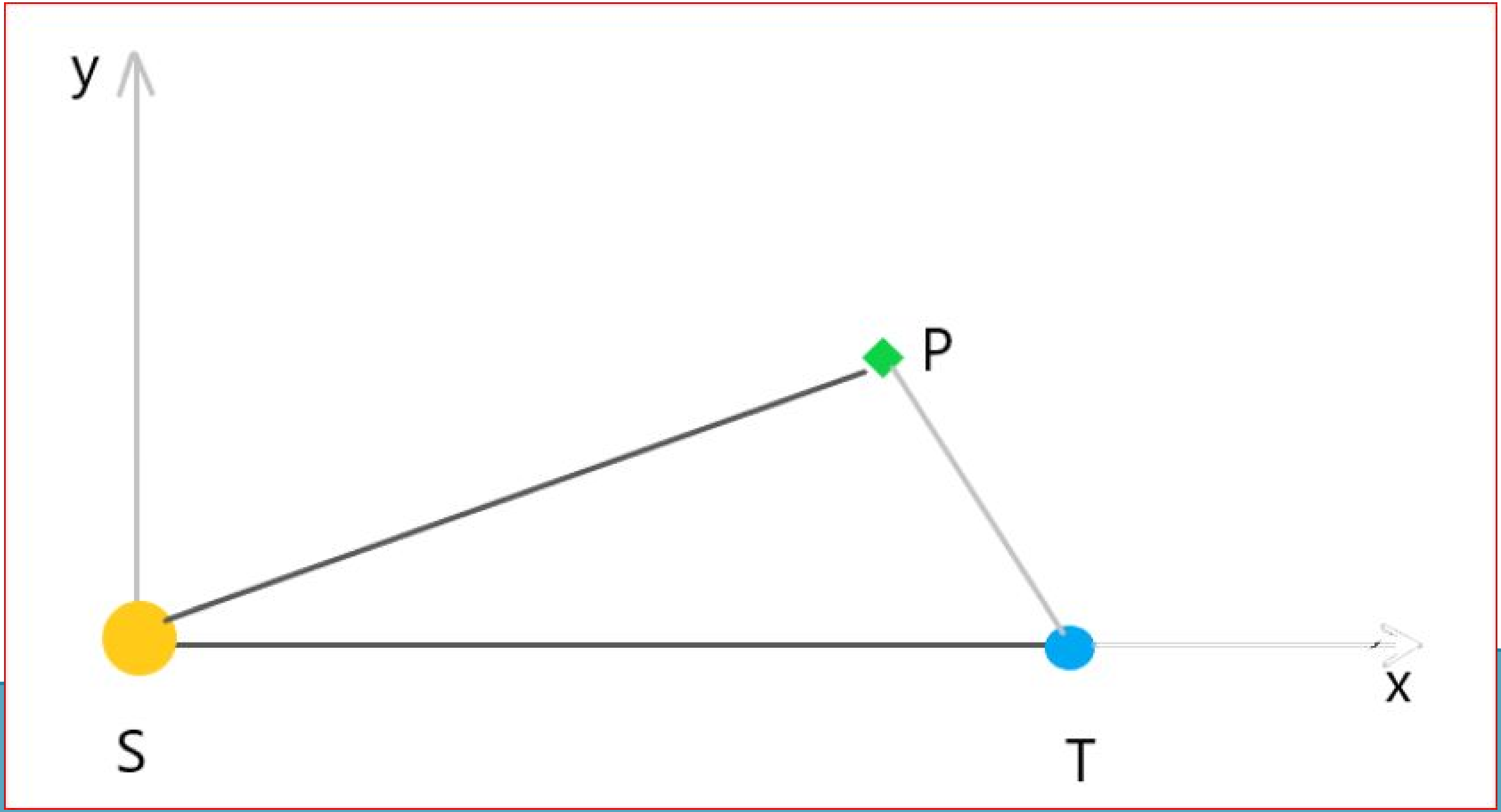
- Les points d’équilibre d’un troisième corps de **masse m <<MS et MT** lié à T.
  - Par exemple des points de l’espace autour de la Terre et du Soleil où un objet de faible masse , un satellite, qui y est placé tourne avec eux.

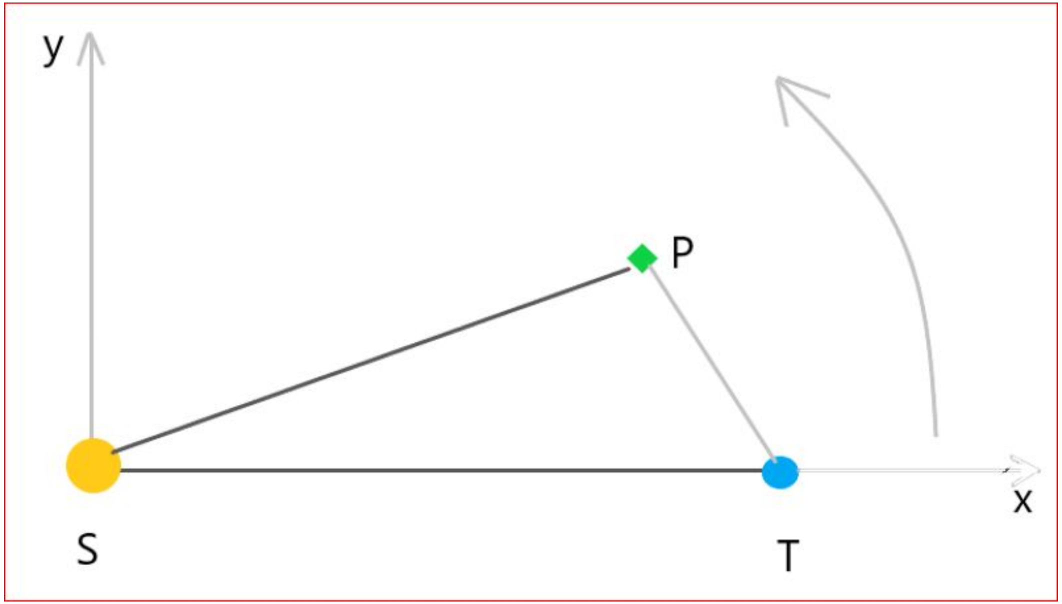
- Ce sont les points de Lagrange.

Schéma

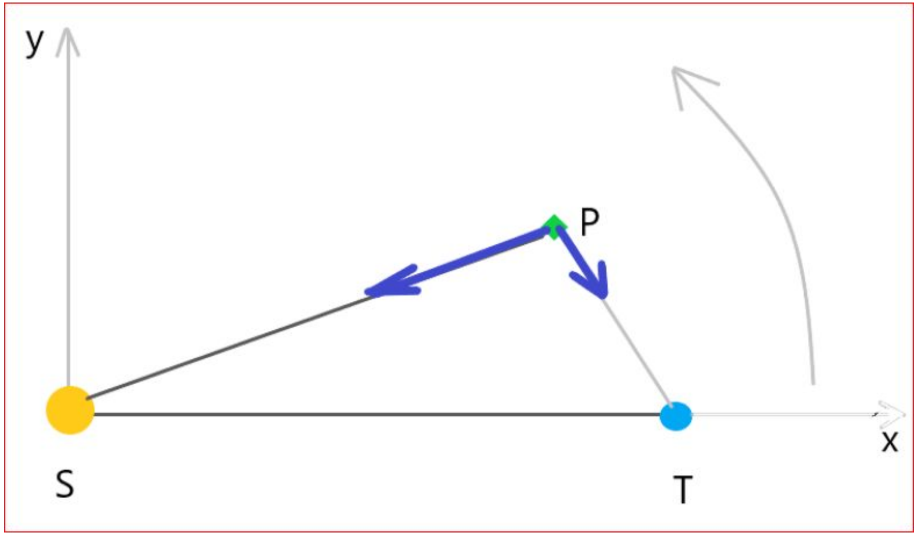


On peut simplifier :

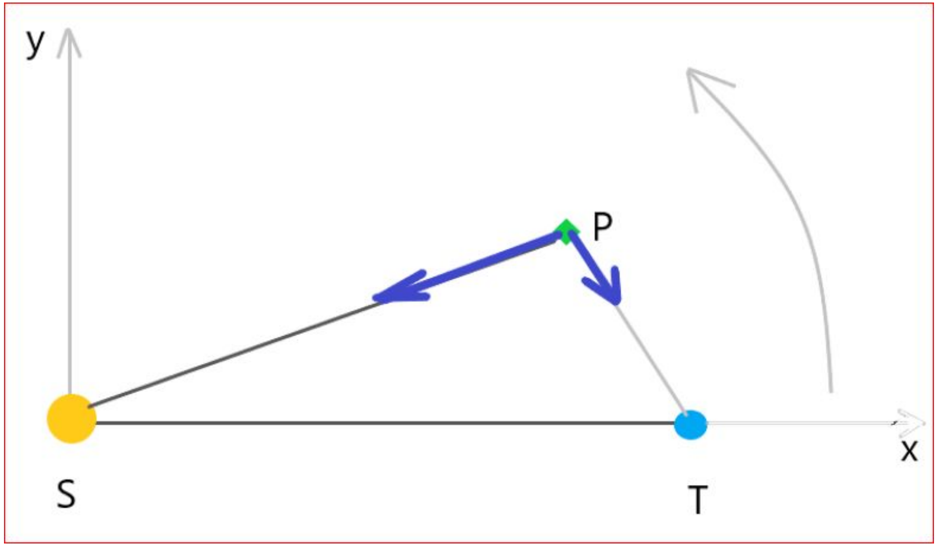




- Les objets S, T et P sont immobiles dans un référentiel xSy tournant à vitesse angulaire constante ω



- Ms et Mt sont les masses du Soleil et de la Terre.
- La masse de P est négligeable par rapport à Mt et Ms.



- P est soumis à quatre forces :
  - Force gravitationnelle de S
  - Force gravitationnelle de T
  - Force centrifuge
  - (« force » de Coriolis : mouvement d’un corps en rotation dans un référentiel lui-même en rotation)

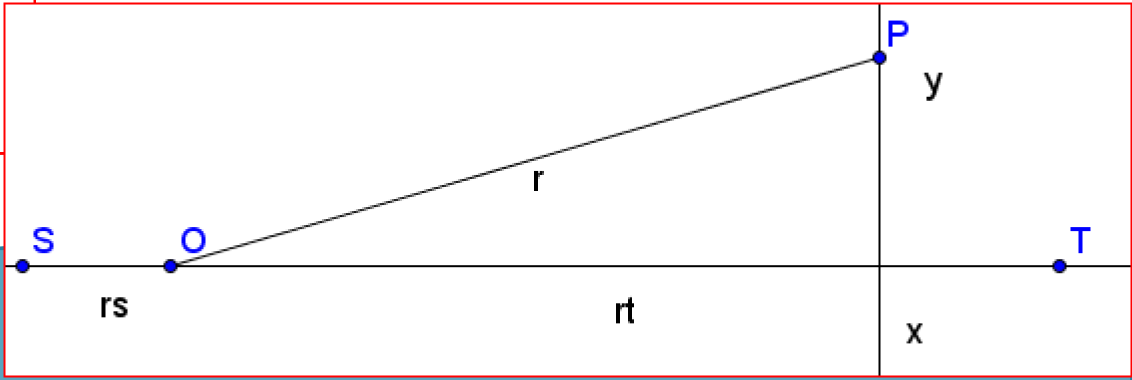
Problème : on voudrait que P soit immobile par rapport à S et T.

Trouver les coordonnées cartésiennes x et y de P pour lesquelles les forces s'annulent.

- Après quelques calculs on obtient deux équations qui donnent les coordonnées de P pour P en équilibre (somme des forces = 0).

$$\frac{-GMs}{SP^3}(x+r_s)-\frac{GMt}{TP^3}(x-rt)+\omega^2 x=0$$

$$\frac{-GMs}{SP^3}y-\frac{GMt}{TP^3}y+\omega^2 y=0$$

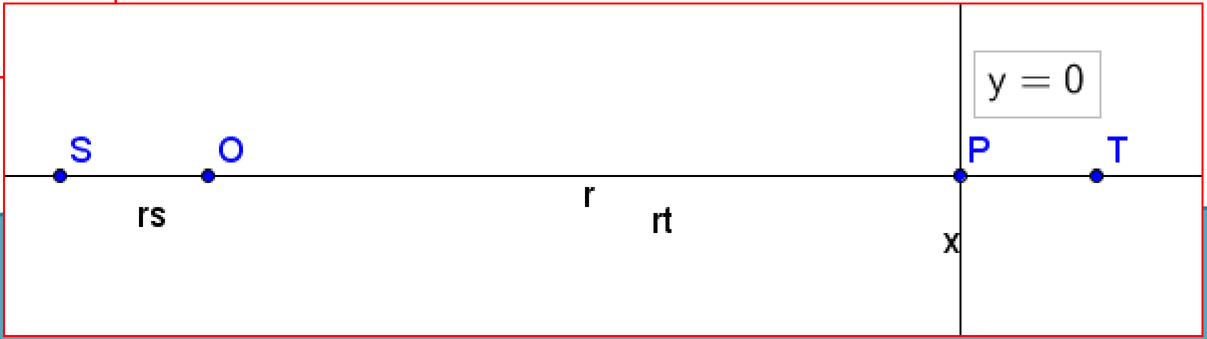


- On voit dans ces équations un ensemble de solutions où y = 0 (solution de la seconde équation)
- Les points seront sur l’axe des x.

$$\frac{-GMs}{SP^3}(x+r_s)-\frac{GMt}{TP^3}(x-rt)+\omega^2 x=0$$

$$\frac{-GMs}{SP^3}y-\frac{GMt}{TP^3}y+\omega^2 y=0$$

- La résolution des l’équation en x donne trois solutions : trois points de Lagrange.



Conditions

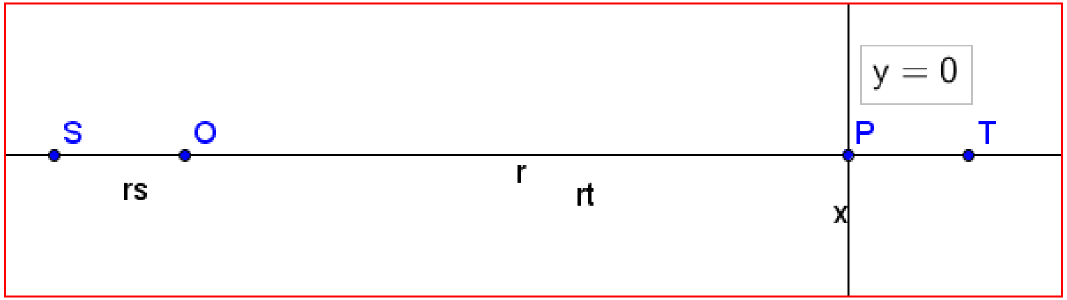
- Si m2 < < m1 (masse de la Terre par rapport à celle du Soleil)

  m t / ms = 0 000003

- Alors la distance de L1 et L2 à la Terre = limite de Hill

Calculs de L1

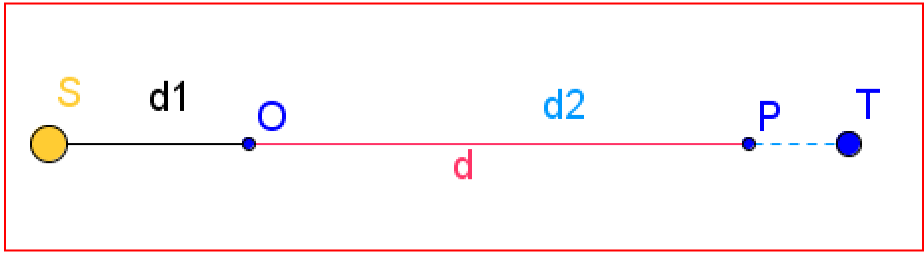
- Les forces en jeu s’annulent en P



- $F_{centrifuge}$ = $F_{gravitation}$ due à S – $F_{gravitation}$ due à T

- Masse de L négligeable

Point L1 :



- Point d'équilibre des forces (comme calcul du barycentre mais avec trois corps)

  $- Ms/(OP-OS)^2 + MT/(OP-OT)^2 + (Ms+Mt)\, OP / (ST)^3 = 0$

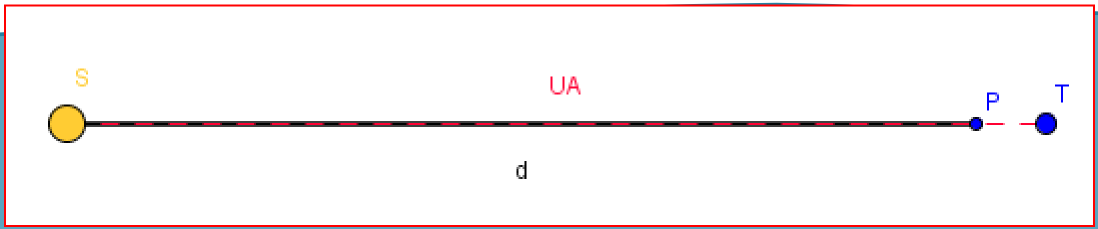
  On pose OP=d , OS= d1, OT = d2 , Ms+Mt = M et ST = d1-d2 = l (Attention au signe : OS est <0 et OT est > 0)

  $$- Ms/(d-d1)^2 + Mt / (d-d2)^2 + M\, d/(d1-d2)^3 = 0$$

- On peut simplifier en considérant que le barycentre est confondu avec le centre du Soleil :

  $$- Ms/d^2 + Mt / (UA-d)^2 + M\, d/(UA)^3 = 0$$

- UA, la distance Terre-Soleil, Ms et Mt sont connus.
- Pour résoudre cette équation on fait varier OP=d par valeurs croissantes et on cherche sa valeur lorsque la somme des trois fonctions tend vers 0.
- La distance du point L1 à T est donné par OT-OP : **1 491 127 km ≈ 1 500 000 km**



Point L2

$- Ms/(OP-OS)^2 - MT/(OP-OT)^2 + (Ms+Mt)\ OP / (ST)^3 = 0$

- Soit après simplification :

$$- Ms/d^2 - Mt / (UA-d)^2 + M\ d/(UA)^3 = 0$$

- Avec le même méthode on trouve : 1 501 294 km

Pour L3 :

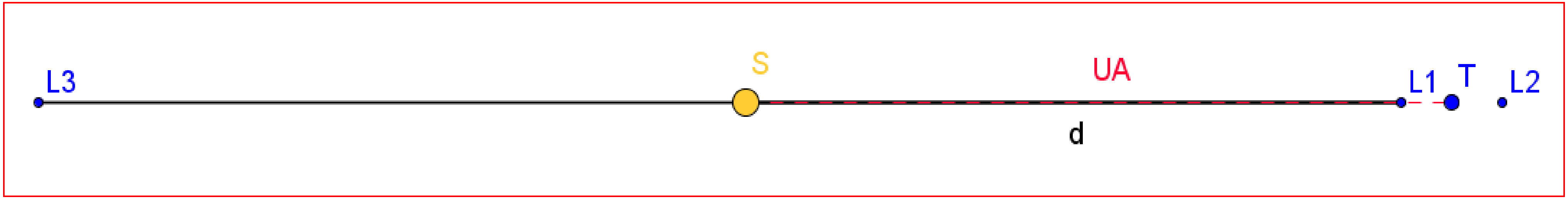
$Ms/(OP-OS)^2 + MT/(OP-OT)^2 + (Ms+Mt)\ OP / (ST)^3 = 0$

- Soit (avec la simplification) :

$$\mathbf{Ms/d^2 + Mt / (UA-d)^2 + M\ d/(UA)^3 = 0}$$

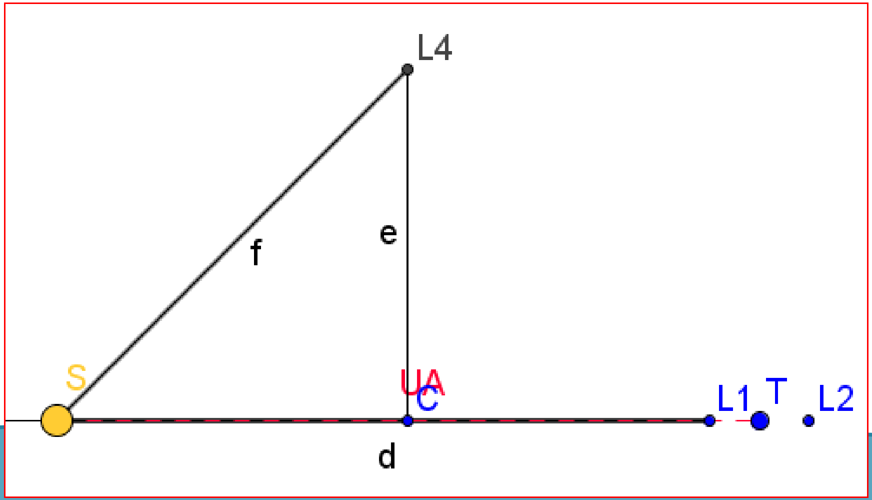
- Le calcul donne : - 149 597 876 km
- Soit à peu près la distance Terre-Soleil

Les points L1, L2 et L3

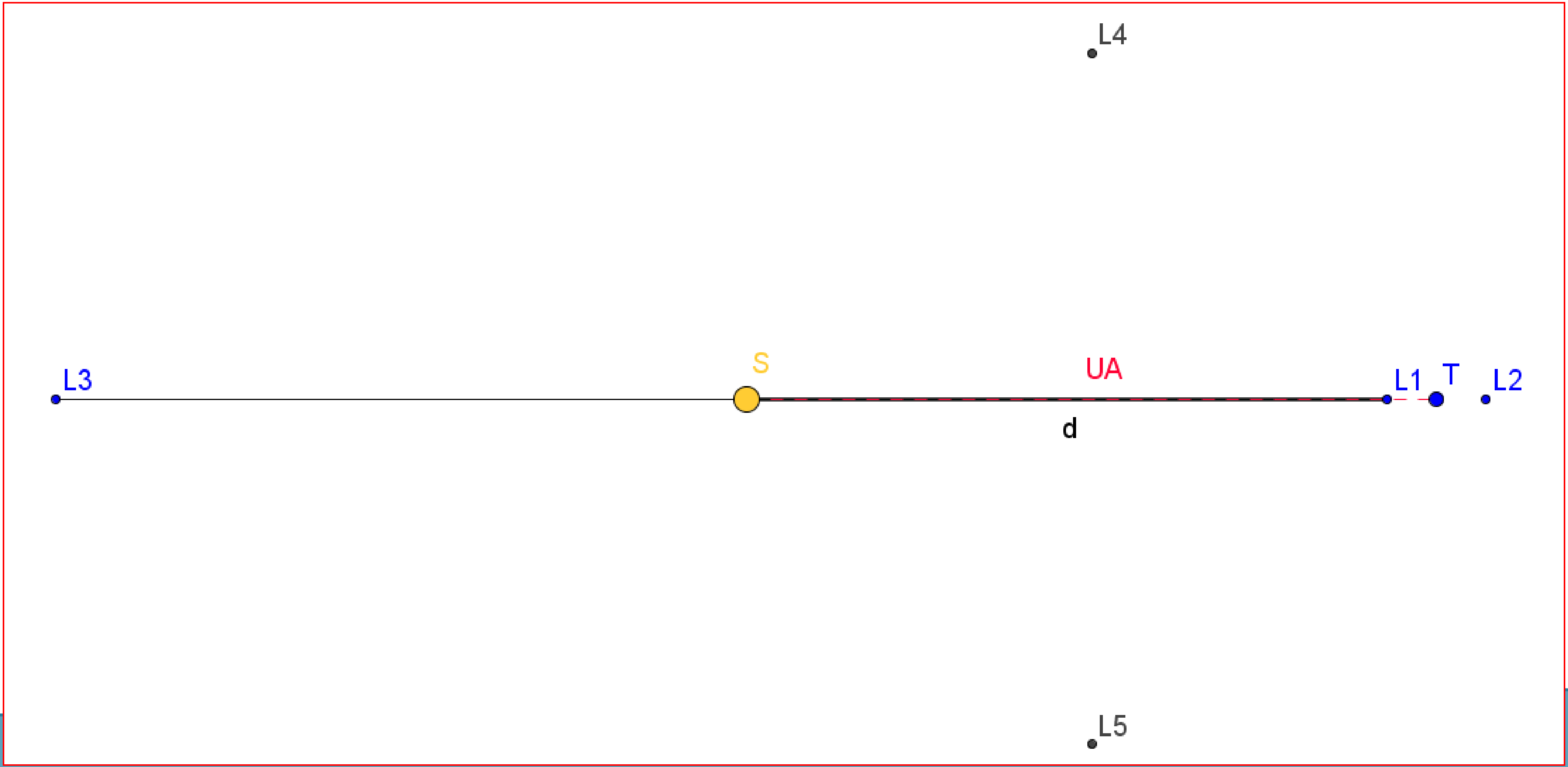


Les points L4 et L5

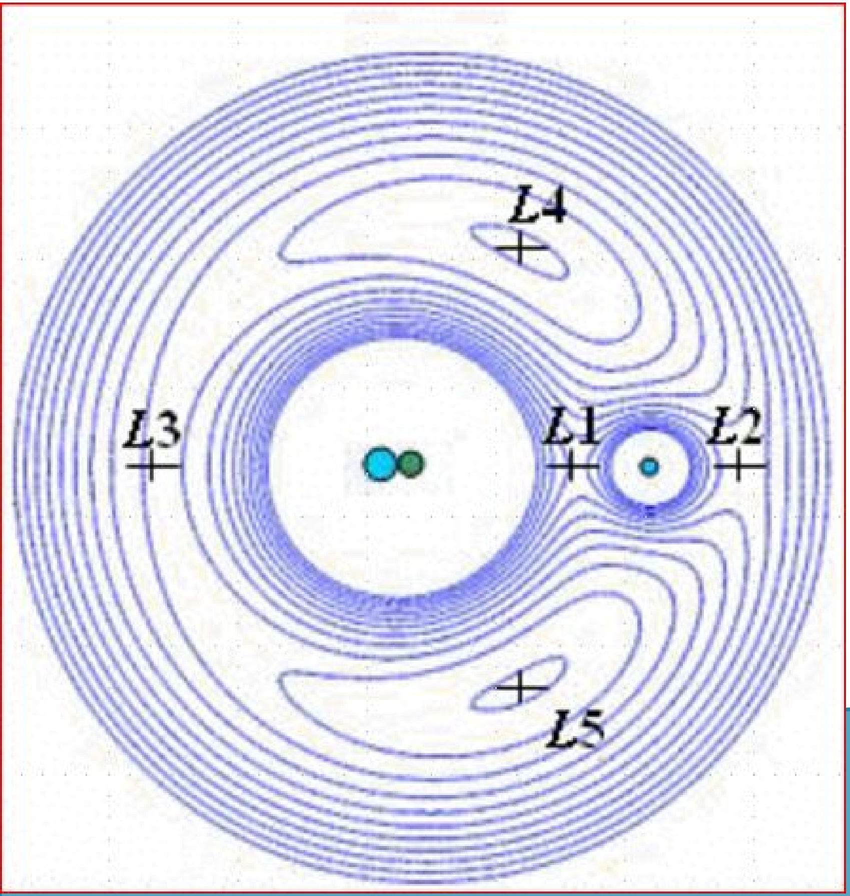
- On démontre(voir dernières diaposities : annexe) que ces points sont sur les sommets de triangles équilatéraux dont les côtés sont égaux à la distance Terre-Soleil
- Alors les coordonnées des points sont (avec le théorème de Pythagore):
  - Pour L4 : UA/2, √3UA/2
  - Pour L5 :UA/2, - √3UA/2



- L4: x= 74 798 938 km y= 129 555 560 km
- L5: x= 74 798 938 km y= - 129 555 560 km

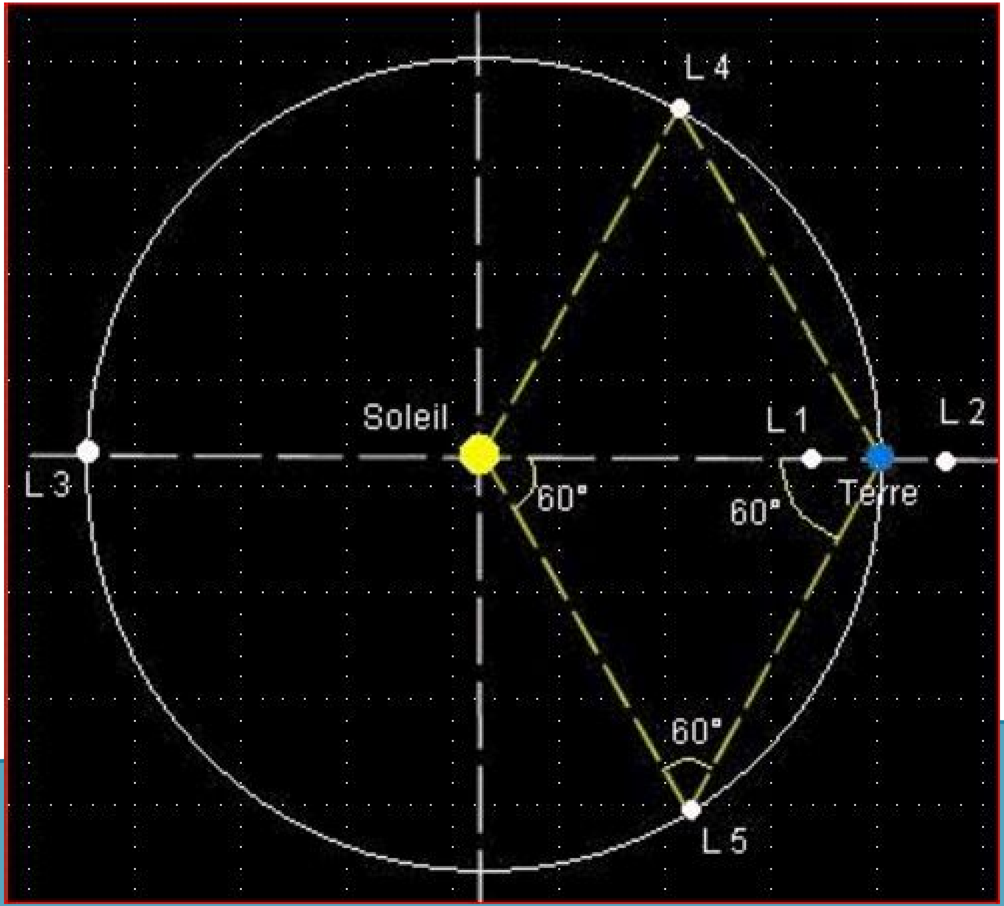

L4
L3
S
UA
L1
T
L2
d
L5

Résultat



- Courbes d’iso-accélération (les « courbes de niveaux »)
- Les points de Lagrange sont bien dans des zones d’accélération nulle par rapport à la Terre et au Soleil

Les cinq points de Lagrange

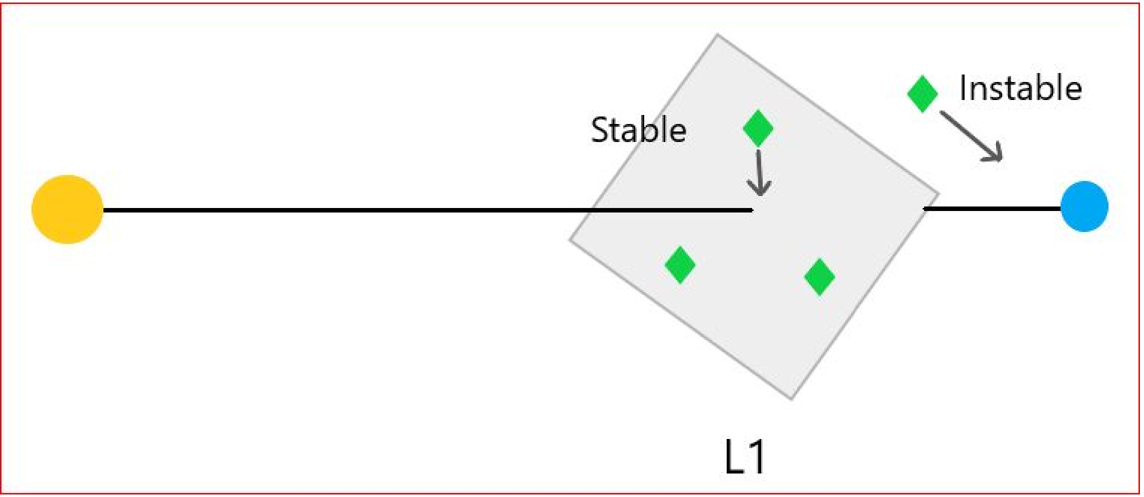


Remarques

- Les points L1, L2 et L3 sont instables : il n’y a pas d’objets naturels connus en ces points : pas d’interaction avec d’éventuels corps en orbite.
- Une stabilité des points L1 et L2 existe **dans le plan perpendiculaire aux masses**
- Les points L4 et L5 sont stables (mais présence de poussières impropres aux satellites d’observation)

Notion (simpliste!) de stabilité

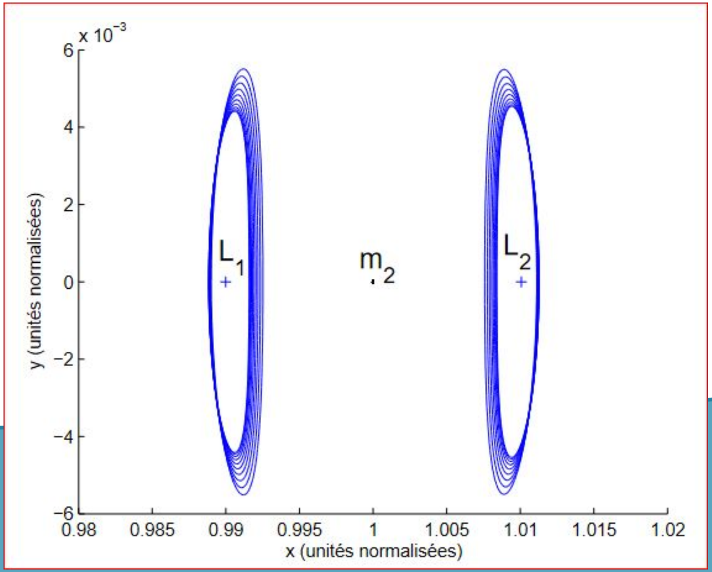
- Un crayon posé sur sa pointe est instable !
- Néanmoins il existe en théorie, une position (calculable) pour laquelle ce crayon resterait posé sur sa pointe.
- Il suffirait de corriger (avec des petits moteurs) sa position chaque fois qu'il tend à s'en écarter.

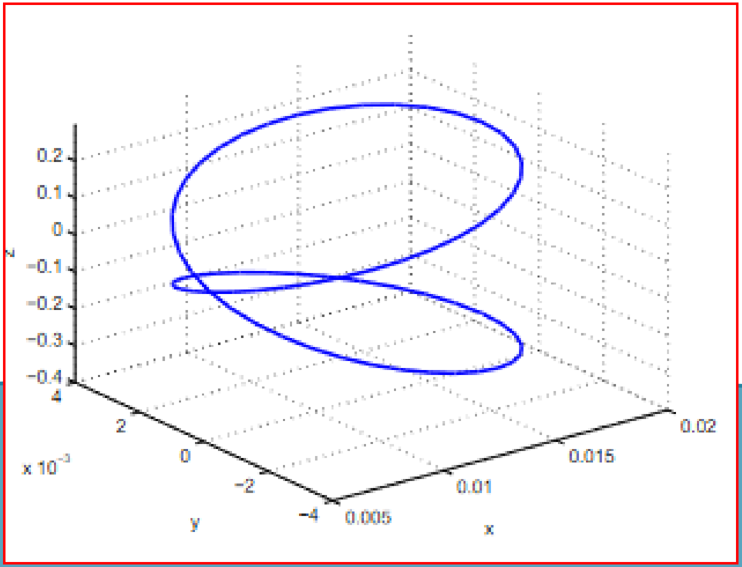


- Dans le plan perpendiculaire passant par L1 ou L2 : un objet qui s’en éloigne est ramené en L1 ou en L2 .
- Ailleurs, il tombe sur un des corps principaux.

Orbites aux points L1 et L2

- Les objets placés en ces points décrivent des orbites de petite dimension : orbite de Lissajous (comme Planck et Gaia) ou en halo (satellite Queqiao de la mission Chang'e 4).
-

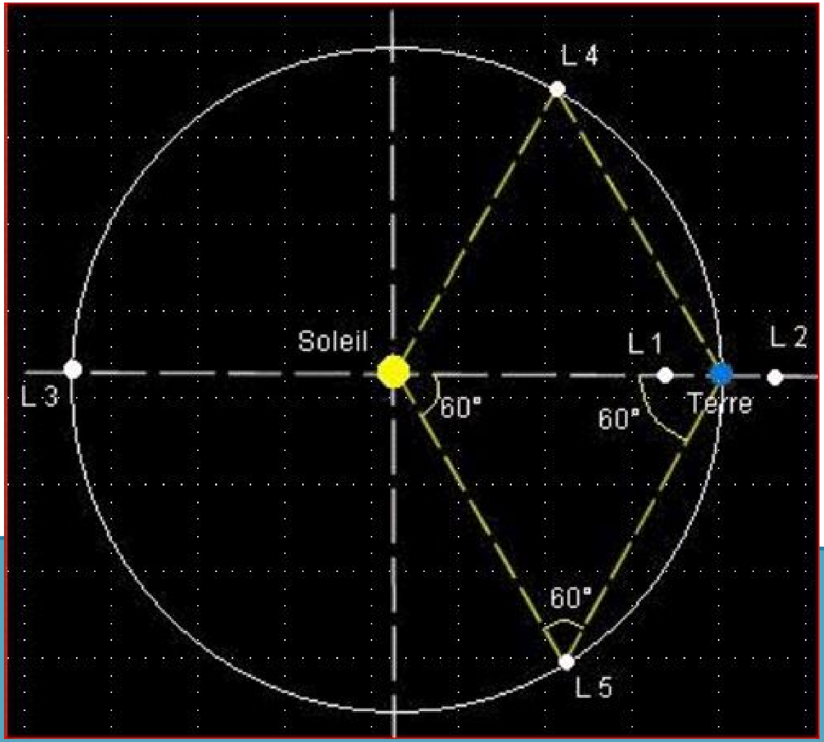




Exemples de satellites placés aux points de Lagrange

- L1 : bon pour l'observation du Soleil et de la Terre.

- L2 : bon pour l'observation du ciel profond et des étoiles. Un problème : la Terre na masque-t-elle pas le Soleil et ainsi il n'éclairait pas les panneaux solaires ?



- En réalité on a une éclipse annulaire de Soleil :
  - Rayon angulaire apparent de La Terre depuis L2: 0,242°
  - Rayon angulaire apparent du Soleil depuis L2: 0,264°
- En plus, le satellite au point L2 est en réalité en orbite autour de L2 et s'écarte de L2 selon une orbite de Lissajous comprise dans un quadrilatère qui est pour Gaia de 700 000 X 370 000 X 200 000 km.
- Il n'y a pour Gaia aucune éclipse même partielle (Patrick Blau, « Gaia Mission Section : Gaia Mission & Orbit Design » spaceflight101.com).

- Les panneaux solaires sont donc suffisamment exposés aux rayons du Soleil.

Exemples de satellites placés aux points de Lagrange

- L1 : SOHO, ACE (Advanced Composition Explorer : vent solaire)
- L2 : Planck (2009-2013), James-Webb (?), Gaia(2013), Euclide (2022).

Autres applications possibles dans le système Terre-Lune

- Placer un relai pour transmettre les signaux venus de la face cachée (Chine : Chang’e 4). Il est sur une orbite en halo.

- Placer une station spatiale en L1. Les voyages entre elle et la Lune seraient très peu coûteux en énergie.

Applications « naturelles » des points de Lagrange : les astéroïdes troyens

- Approximativement aux points de Lagrange L4 et L5 entre une planète et le Soleil.

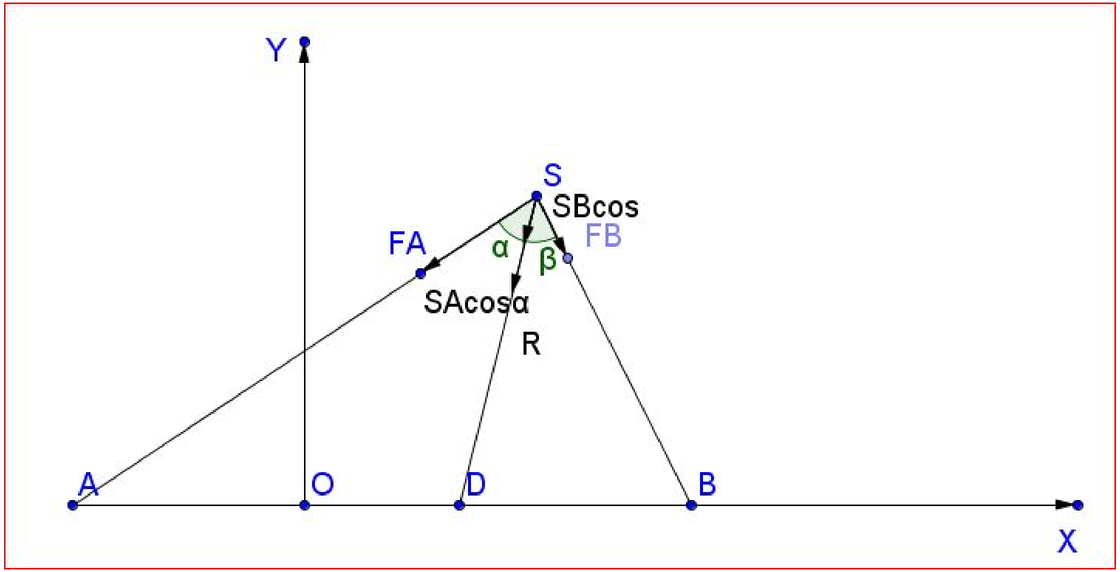
Sur l’orbite de Jupiter :

- En L4 : 4 603 astéroïdes ou « camp grec »
- En L5 : 2 476 astéroïdes ou « camp troyen »

Sur l’orbite d’autres planètes

- Venus : 1 en L4
- Terre : 2 en L4 ; nuages de poussière en L4 et L5 dans le système Terre-Lune.
- Mars : 8 objets en L5 et 1 en L4
- Saturne : 0
- Uranus : 1 en L4
- Neptune : 24 en L4 et 4 en L5
- Source : Minor Planet Center (IAU)

Annexe : principe du calcul de L4 et L5



- A et B : les corps massifs de masses Ma et Mb
- D centre de masse
- S : satellite
- FA et FB les forces exercées sur S par A et B
- FAcosα et FBcosβ : leurs projections sur DS

Principes du calcul

- Les forces gravitationnelles s'annulent avec la force centrifuge
- On en déduit (cherchez) l'égalité entre AS et BS.
- Calcul des angles au sommet du triangle ASB :
- S et B sont en rotation de même vitesse **angulaire**
- Les forces centrifuges sont compensées par les forces gravitationnelle FAcosα et FBcosβ. On en tire les égalités force centrifuge et forces gravitationnelles.
- On reconnaît le théorèmes des sinus dans le triangle SDB et on vérifie que la solution de l'équation avec les sinus des angles α et β n'est valable que pour $\alpha=\beta=60°$
- SDB est équilatéral et on sait que D et A sont confondus, donc le triangle ASB est équilatéral
- Les points L4 et L5 sont au sommet de deux triangles équilatéraux de même base AB (Soleil-Terre)