La gravitation newtonienne

G. Paturel, Observatoire de Lyon

14 Octobre 2011

1) La loi d'attraction de la gravitation universelle

Longtemps la masse s'est confondue avec le poids. Il a fallu que l'on comprenne, grâce à Newton, que le **poids** n'était qu'une manifestation de la force d'attraction entre deux corps doués d'une propriété étrange, la **masse,** caractérisant le contenu matériel. Cette force d'attraction, entre deux corps, s'appelle la force de gravitation universelle. Le poids est l'attraction entre une masse à la surface de la Terre et la masse de la Terre tout entière.

Nous allons essayer de comprendre l'expression mathématique de cette force. Imaginons deux corps sphériques, de masse M et m respectivement, flottant dans l'espace. Si comme Newton l'a imaginé, ces deux masses s'attirent selon cette force mystérieuse qu'est la gravitation, il est facile de comprendre que la force F_{Mm}, exercée par M sur m est la même que celle, F_{mM}, exercée par m sur M (La pomme qui tombe est attirée par la Terre, mais elle attire aussi la Terre). En effet, imaginons les deux corps, flottant dans l'espace, sans frottement aucun et imaginons qu'un fil les relie. Si M et m tirent sur le fil, la force transmise sera la tension du fil. Elle sera donc la même en intensité et donc $F_{Mm} = F_{mM}$. Bien sûr, la direction de la force sera opposée. Le module de la force d'attraction réciproque sera désormais désigné par F.
Nous *pouvons imaginer*[1] que la force produite par une masse est proportionnelle au produit des deux masses. En effet m et M jouent des rôles parfaitement symétriques. Dans l'expression mathématique m et M doivent pouvoir être permutées sans changer le résultat. De plus si l'une des deux masses, m ou M, est nulle, F doit être nulle. L'expression la plus simple qui satisfait aux deux conditions (symétrie et nullité) est :

$$F=K.Mm \qquad (1)$$

où K est une fonction à déterminer. De quoi la fonction K peut-elle dépendre ?
Si les masses m et M sont très éloignées l'une de l'autre, l'action réciproque doit être plus faible. On peut donc imaginer que K varie comme l'inverse de la distance *d* entre les deux corps. Historiquement, quelques savants (I. Boulliau, R. Hooke) avaient supposé que cette force décroissait comme l'inverse du carré de la distance. Newton va le justifier par une remarque en analysant le mouvement de la Lune. Mais avant de donner cette justification nous devons préciser ce qu'on entend par distance entre les deux corps. Est-ce la distance entre les points les plus proches, ou les plus éloignés, ou est-ce la distance entre deux points intermédiaires. Il s'avère, mais nous ne le montrerons pas, que les points concernés sont les centres de masse (ou centres de gravité) des deux corps. On peut le montrer en considérant l'attraction de chaque élément des corps considérés. C'est assez compliqué pour des corps de forme quelconque. Dans le cas d'un corps sphérique, le centre de gravité est confondu avec le centre de la sphère, à condition que la masse du corps soit parfaitement homogène. Pour l'instant, la distance de séparation sera considérer très grande devant la taille des corps. Nous verrons ce qui se passe quand ce n'est plus le cas en étudiant les effets de marée.

[1] Ceci est une supposition gratuite, qui sera validée ultérieurement par les résultats qu'on en déduira

Voyons donc comment Newton a montré de quelle façon la force entre deux corps sphériques varie en fonction de la distance. On sait depuis Galilée, qu'aucune force n'est nécessaire pour qu'un corps garde sa vitesse en l'absence de frottement. Galilée disait que la vitesse est comme rien. Une force ne fait que modifier la vitesse, en module ou en direction. La force crée donc ce qu'on appelle une accélération. Newton a supposé qu'une force crée une accélération proportionnelle à la quantité de matière du corps, c'est-à-dire à la masse[2]. Par exemple, sous l'action de la force qu'est le poids, un corps tombe de plus en plus vite. Il est soumis à une accélération. La relation la plus simple que l'on peut imaginer entre la force et l'accélération est :

$$\boxed{F = m \cdot a} \qquad (2)$$

a est l'accélération que prend un corps de masse *m* sous l'action d'une force *F*. C'est la loi fondamentale de la dynamique de Newton[3]. Nous ne ferons pas de distinction entre cette masse "inerte" qui intervient dans l'inertie et la masse "grave" qui intervient dans la gravitation. Pour voir comment F varie avec la distance, Newton a comparé l'accélération produite par la Terre, au niveau du sol et à la distance de la Lune.

Encadré 1: Petit rappel sur la cinématique d'un corps soumis à une accélération constante

Par définition l'accélération est : $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt})$ (E1-1)

En intégrant une première fois par rapport à *t* on trouve la vitesse $v = \frac{dx}{dt} = a.t + v_0$ (E1.2)

En intégrant une seconde fois on trouve la distance parcourue : $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ (E1.3)

Si la vitesse initiale est zéro et si les positions sont mesurées à partir de la position de départ (v_0=0 et x_0=0) on a les expressions plus simples :

$$v = a.t \text{ et } x = \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(E1-4)}$$

Dans un corps en chute libre, la vitesse augmente proportionnellement au temps. La constante de proportionnalité est l'accélération. La hauteur de chute varie, elle, comme le carré du temps de chute. Galilée avait déjà compris ces caractéristiques de la chute des corps.

Au niveau du sol, à une distance de 6400 km du centre de la Terre, l'accélération est facile à mesurer. En une seconde, un corps, quel qu'il soit, tombe d'une hauteur de *H*=4,9 mètres. Il a subit une accélération de 9,8 (m/s)/s.

Qu'en est-il au niveau de la Lune ? Newton a constaté que la Lune "tombait". En effet, en l'absence de la Terre, le mouvement de la Lune devrait se faire en ligne droite. Mais, attirée par la Terre, la Lune se rapproche de celle-ci (elle "tombe") en déviant de sa trajectoire. De combien tombe-t-elle en une seconde ? Le calcul est facile (voir Figure 1). En une seconde, la Lune

[2] Nous verrons plus loin qu'il est possible de discuter la distinction entre la masse qui intervient dans la gravitation et la masse qui intervient dans l'inertie d'un corps.
[3] Cette loi, en toute rigueur, est une loi vectorielle, ce qui signifie qu'elle est valable dans les trois directions de l'espace physique.

parcourt une longueur égale à la circonférence de sa trajectoire (2πD) divisée par sa période *P* de révolution autour de la Terre (période exprimée en secondes). Soit :

$$L = 2\pi \frac{D}{P}.$$

La figure 1 montre que la hauteur de chute *h* est telle que : $(D+h)^2 = D^2 + L^2$, relation dont on tire, après simplification et combinaison avec l'expression de *L* :

$$h = \frac{L^2}{2D} = 2\pi^2 \frac{D}{P^2}$$

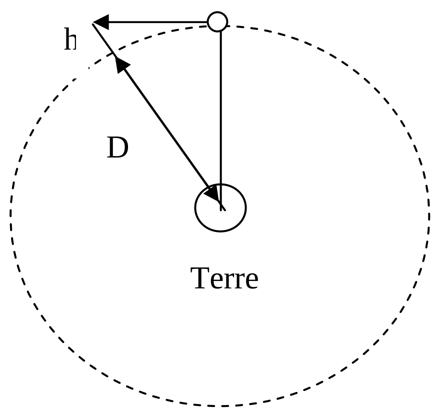

Figure 1 : Chute de la Lune en 1 seconde

Avec la distance Terre Lune moyenne *D* =384 000 km et la période de 27,3 jours, c'est-à-dire 2358720 secondes, on trouve *h*=0,00136 m. La Lune a donc subi une accélération de 0,00272 (m/s)/s.
Calculons avec Newton le rapport de ces deux accélérations :
A 6400 km on a une accélération de 9,8 (m/s)/s
A 384400 km on a une accélération de 0,00272 (m/s)s

Le rapport des accélérations (donc des forces d'attraction selon la relation 2) est :
9,8/0,00272 = 3603.
Le rapport des inverses des distances est 60,1, donc la force de gravitation ne varie pas comme l'inverse de la distance.
Le rapport des carrés des inverses des distances est 3608. Cette valeur est très comparable au rapport des accélérations. On peut raisonnablement supposer que la force d'attraction gravitationnelle varie comme l'inverse du carré des distances des centres.
En conclusion, en reprenant notre relation (1), on voit que la fonction K est proportionnelle à l'inverse du carré des distances ($K=G/d^2$) La loi générale de l'attraction universelle s'écrit donc :

$$\boxed{F = G\frac{Mm}{d^2}} \qquad (3)$$

Dans cette loi donnant la force de la gravitation universelle, *G* est une constante universelle (à déterminer par l'expérience), *m* et *M* sont les masses respectives des deux corps considérés et *d* est la distance des centres de gravité des deux corps. Cette loi est fondamentale pour la gravitation Newtonienne. Les choix faits *a priori* seront justifiés par la comparaison à l'expérience.

Si on accepte de confondre masse inerte et masse grave, comme l'expérience le justifiera avec une énorme précision, alors nous pouvons combiner les relations (2) et (3). Le poids d'une masse m est alors la force d'attraction produite par la masse de la Terre M sur cette masse m ; l'accélération qui apparaît s'appelle alors l'accélération de la pesanteur (on la note g):

$$P = m \cdot G \frac{M}{R^2} = m \cdot g \qquad (4)$$

Avec l'accélération de la pesanteur terrestre :

$$g = G \frac{M}{R^2} \qquad (5)$$

R est la distance au centre de la Terre (rayon de la Terre) et M la masse de la Terre. On voit que g a une valeur constante pour tous les corps à la surface de la Terre. Mais le poids d'un corps décroît avec l'altitude. On sait mesurer l'accélération g à la surface de la Terre. Mais la masse de la Terre semble impossible à mesurer. Pourtant, un chimiste du nom de Cavendish va y parvenir grâce à une invention géniale : la balance de torsion, inventée par Coulomb. La constante inconnue G pourra alors être déduite. C'est la constante physique universelle la moins bien connue, tant la difficulté de la mesure est grande.

Une expérience fondamentale : l'expérience de Cavendish (1798).

C'est la première mesure de la force de gravitation entre deux masses ordinaires. Une balance de torsion (fléau suspendu à un fil très fin) permet de mettre en évidence l'attraction de grosses boules (en gris) sur de petites boules (en noir) accrochées au fléau (en marron). En inversant le sens d'action des grosses boules, le fléau tourne légèrement. De l'angle de rotation on peut déduire la force de gravitation entre les grosses et les petites boules. L'angle de rotation peut se mesurer par un système optique, par exemple en observant la lumière d'un point lumineux réfléchie par le petit miroir collé au fléau.

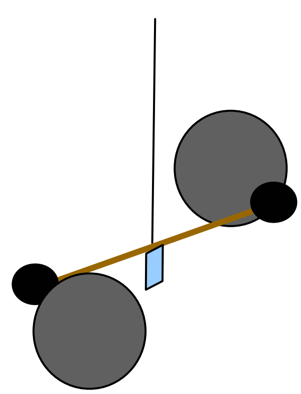

Figure 2 : Le principe de l'expérience de Cavendish avec une balance de torsion. Cavendish a utilisé cette expérience pour déterminer la masse de la Terre.

La Masse de la Terre

Avec la balance de Cavendish, on mesure la force newtonienne (la force de gravitation universelle) entre deux corps de masse *M* et *m*, dont les centres de gravité sont séparés par une distance connue *d* (on connaît ces masses par une comparaison de leurs poids avec celui du kilogramme étalon).

$$F = G\frac{M \cdot m}{d^2}$$

Interprétons le poids de l'une des deux masses (*m* par exemple) comme étant une force newtonienne due à la masse de la Terre

$$P = G\frac{M_{Terre} \cdot m}{R_{Terre}^2} \qquad (6)$$

En faisant le rapport on trouve :

$$\frac{P}{F} = \frac{M_{Terre}}{M}\frac{d^2}{R_{Terre}^2} \quad \Rightarrow M_{Terre} = M \cdot \frac{P}{F} \cdot \frac{R_{Terre}^2}{d^2} \qquad (7)$$

Cavendish a trouvé ainsi que la masse de la Terre était environ 5970 milliards de milliards de tonnes et donc que sa masse volumique moyenne (masse divisée par le volume) était de l'ordre de 5000 $kg.m^{-3}$ (densité 5 fois plus forte que celle de l'eau). Le centre de la Terre doit donc nécessairement être constitué d'éléments très denses comme le fer.

On remarque que Cavendish n'a pas eu besoin d'exprimer la valeur de *G* (ce que lui reprochera Boys). Il aurait pu la déduire de la relation (6) en utilisant la masse de la Terre qu'il avait trouvée. La valeur de G est :

$$G{=}6{,}6748 \pm 0{,}0008 \times 10^{-11} \mathrm{N.m^2.kg^{-2}} \qquad (8)$$

Exercice 1 : *Calculons la masse de la Terre*

En mesurant la période *T* d'oscillation d'un pendule simple de longueur *L*, on peut déduire l'accélération de la pesanteur *g* au moyen de la loi du pendule :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (9)$$

On se rappelle (relation 5) que $g = G\frac{M_{Terre}}{R_{Terre}^2}$.

Comme le rayon de la Terre est connu, on en déduit la masse de la Terre. On effectue la mesure avec un pendule de longueur 45,5 centimètres. Pour de petites amplitudes, on trouve la période : T=1,3543±0,0025 s. On calcule alors la masse de la Terre :

$$M_{Terre} = \frac{4\pi^2 R^2 L}{GT^2} = \frac{39{,}4784 \times 4{,}0577 \times 10^{13} \times 0{,}455}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}8341}$$

Soit : $M_{Terre} = 5{,}96 \pm 0.02 \times 10^{24} kg$ ou, dit autrement, 5960 milliards de milliards de tonnes.

(La valeur admise aujourd'hui est 5974 milliards de milliards de tonnes).

Les lois de Kepler

L'expérience de Cavendish va ouvrir la voie de la détermination des masses des objets astronomiques. Nous allons voir comment ont été mesurées les masses du Soleil, de la Lune, des planètes, et des étoiles. Mais auparavant nous devons faire quelques rappels importants sur les lois de Kepler.

En étudiant quelques planètes gravitant autour du Soleil, Kepler a montré empiriquement, que le rapport du cube du rayon de l'orbite (noté *a*) et du carré de la période de révolution (notée *T*) était constant pour toutes les planètes. Ceci s'exprime mathématiquement par une relation simple, très importante d'un point de vue pratique, que l'on appelle **la troisième loi de Kepler** :

$$\frac{a^3}{T^2} = cte \qquad (10)$$

La constante est la même pour toutes les planètes. En fait Kepler a même été plus loin (en particulier avec la planète Mars), il a montré que les orbites n'étaient pas des cercles mais des ellipses dont le Soleil occupait un des foyers (**première loi de Kepler**). Dans la troisième loi de Kepler, la grandeur *a* est en réalité le demi grand axe de l'ellipse. Il a montré aussi que la vitesse orbitale des planètes n'était pas constante, mais qu'elle était plus grande quand la planète était plus proche du Soleil. Il a exprimé cela en disant que le rayon reliant la planète au Soleil balayait des aires égales en des temps égaux (**deuxième loi de Kepler**). Pour l'heure, nous considérerons que les orbites des planètes sont des cercles et donc que le demi grand axe n'est autre que le rayon de l'orbite circulaire.

En supposant que deux corps de masse *M* et *m* s'attirent avec la force de gravitation universelle, Newton (1643-1727) va retrouver les lois de Kepler dans toute leur généralité. Newton va construire ainsi une mécanique précise qui lui permet d'aller au-delà de Kepler. En particulier il parvient à exprimer la valeur de la constante de la troisième loi.

Retrouvons la troisième loi de Kepler

Imaginons une planète (la Terre par exemple) animée d'une vitesse *V* par rapport au Soleil. Sans la présence du Soleil la planète poursuivrait sa trajectoire en ligne droite. Mais la force d'attraction va la faire dévier de la ligne droite. Cette force va provoquer une accélération dynamique centripète en direction du centre du Soleil. Cette accélération s'exprime par V^2/D (voir l'Encadré 2). Si cette accélération est provoquée par la gravitation, nous pourrons également l'écrire à partir de la relation 5, mais écrite pour le Soleil. On obtient alors :

$$\frac{V^2}{D} = G\frac{M_{Soleil}}{D^2} \qquad (11)$$

(Rappelons que D, dans l'exemple pris, est le rayon de l'orbite de la planète autour du Soleil) En simplifiant on trouve :

$$V^2 = G\frac{M_{Soleil}}{D} \qquad (12)$$

Encadré 2 : L'accélération d'un corps en mouvement circulaire uniforme

Nous allons calculer cette accélération en utilisant les notations différentielles, inventées par Leibniz et Newton.

L'accélération est par définition (voir encadré 1) : $a = \frac{dv}{dt}$.

Si la vitesse est constante en module, on peut la faire changer malgré tout, en modifiant simplement sa direction. Si on désigne par *i* l'angle de la vitesse compté par rapport à la direction de la vitesse au point A, alors la composante de l'accélération en direction du centre est : *v.sini*, c'est-à-dire *v.i* (puisque l'angle est très petit). L'accélération centripète pour une déviation infinitésimale *di* sera :

$$a = \frac{d(v \cdot i)}{dt} = v\frac{di}{dt} \qquad \text{(E2.1)}$$

Cette accélération vers le centre, correspond à l'apparition, du fait de la courbure de la trajectoire, d'une composante de *v* le long de la ligne AC.

Mais la petite longueur infinitésimale de l'arc de cercle parcouru pendant le temps *dt* est égale à : $dl = R.di$ (R est le rayon de courbure de la trajectoire - voir la figure F2.1)

Divisons par *dt* pour faire apparaître le module de la vitesse le long de l'arc de cercle et nous obtenons : $v = \frac{dl}{dt} = R\frac{di}{dt}$. Il suffit alors de reporter *di/dt* tiré de cette relation dans l'expression (E2.1) de l'accélération. On obtient l'accélération cherchée :

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(E2.2)}$$

En vertu de la relation (2), la force centripète que subit une masse *m*, est : $F = m.\frac{v^2}{R}$

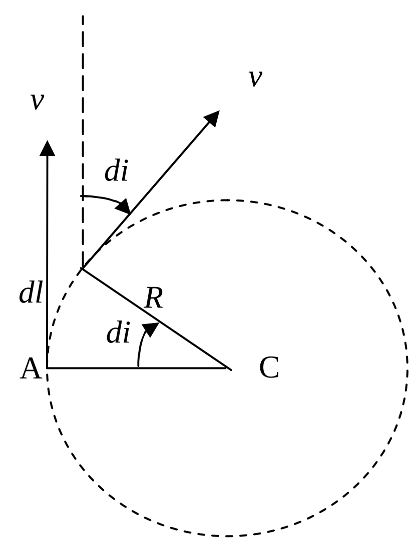

Figure F2.1

Or la vitesse V est égale à la longueur de l'orbite ($2\pi D$) divisée par le temps pour la parcourir (c'est-à-dire la période T) :

$$V = \frac{2\pi D}{T} \qquad (13)$$

En reportant (13) dans (12) on trouve :

$$\boxed{\frac{D^3}{T^2} = G\frac{M_{Soleil}}{4\pi^2}} \qquad (14)$$

C'est bien la troisième loi de Kepler. D n'est autre que le rayon de l'orbite de la planète. On voit que l'on sait exprimer la valeur de la constante. Celle-ci dépend de la masse du Soleil. Ceci explique que toutes les planètes satisfont à la loi avec la même constante. Mais on comprend que l'on peut *généraliser la loi*, par exemple pour la rotation de la Lune autour de la Terre. La constante de la loi de Kepler sera, dans ce cas, calculée avec la masse de la Terre et non pas celle du Soleil. Il y a cependant une complication dans le cas où la masse attractive n'est pas beaucoup plus grande que la masse attirée. La relation 14 est utilisée pour calculer la masse d'un corps, de distance connue, autour duquel gravite un corps bien plus petit. C'est ce que nous verrons dans le prochain chapitre. Mais rappelons que cette relation a été utilisée pour la mesure de la distance Terre Soleil (ce qu'on appelle l'unité astronomique) et partant, des rayons des orbites de toutes les planètes. On montre facilement qu'il suffit de mesurer la distance entre la Terre et une planète quand celle-ci est la plus proche de la Terre. L'application de la relation 14 à la Terre et à la planète considérée conduit alors à la distance Terre Soleil.

Généralisation de la troisième loi de Kepler

Quand deux corps de masses peu différentes l'une de l'autre tournent l'un autour de l'autre, en réalité, ils tournent autour du centre de gravité commun. Comment appliquer alors la troisième loi de Kepler ?

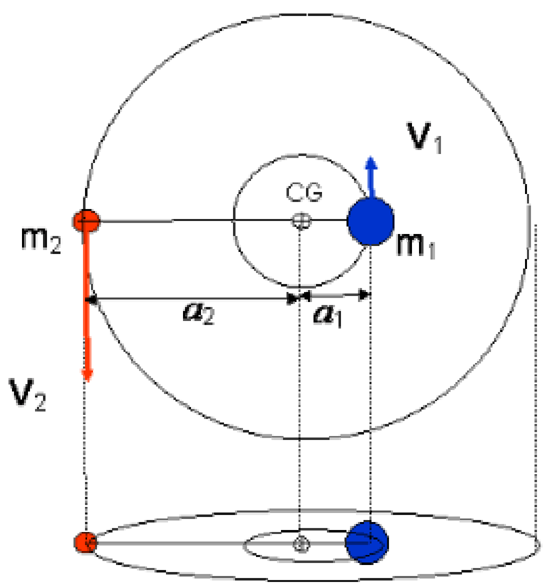

Figure 3 : Cas de deux corps tournant autour du centre de gravité commun

On s'aperçoit (Figure 3) que la distance entre les deux corps est a_1+a_2, chaque corps tournant sur un cercle différent autour du centre de gravité commun. La force d'attraction gravitationnelle sera donc égale à :

$$F = \frac{Gm_1m_2}{(a_1+a_2)^2}$$

Mais la force centripète sera différente pour chacun des deux corps. Pour le corps numéro 1 on aura (en remplaçant la vitesse par son expression tirée de la longueur de l'orbite et de la période) :

$$\frac{Gm_1m_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{m_1}{a_1}\cdot v_1^2 = \frac{m_1}{a_1}\cdot\frac{4\pi^2 a_1^2}{T^2}$$

Soit en simplifiant par m_1

$$\frac{Gm_2}{(a_1+a_2)^2} = \frac{4\pi^2 a_1}{T^2} \qquad (15)$$

Pour le corps numéro 2 on aura de manière similaire :

$$\frac{Gm_1}{(a_1+a_2)^2} = \frac{4\pi^2 a_2}{T^2} \qquad (16)$$

En ajoutant (15) et (16) on obtient la relation généralisée de Kepler-Newton, qui permet de traiter des mouvements orbitaux réciproques de deux corps quelconques (mais petits devant a_1 et a_2) :

$$\boxed{\frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2} = \frac{(a_1+a_2)^3}{T^2}} \qquad (17)$$

Exercice : Application à la masse du couple Terre plus Lune.
L'application à la Lune (Rayon de l'orbite a= 384 400 km et période sidérale P=27,3215 jours) tournant autour de la Terre, conduit directement à l'estimation de la masse de la Terre plus de la Lune (on rappelle que $a= a_1+a_2$) :

$$M_{Terre} + m_{Lune} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2} = \frac{39{,}4784}{6{,}67\times10^{-11}}\frac{(384{,}4\times10^6)^3}{(27{,}3215\times24\times60\times60)^2} = 6{,}03\times10^{24}$$

Or nous avons déjà calculé la masse de la Terre seule : $5{,}96\times10^{24}$ kg
Nous en concluons que la masse de la Lune est égale à la différence:

$$m_{Lune} = (6{,}03 - 5{,}96)\times10^{24} = 7{,}00\pm2\times10^{22}\text{ kg}$$

Les valeurs admises sont

$m_{Lune} = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg et $M_{Terre} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

La méthode que nous venons de voir n'est pas précise. On utilise en pratique une autre méthode. La variation mensuelle de position apparente d'un corps proche comme Mars (ou plus récemment un satellite test) reflète l'oscillation de la Terre autour du centre de gravité Terre – Lune. On trouve alors que la Lune est 81 fois plus loin du centre de gravité que la Terre, donc que la masse de la Lune est 81 fois plus petite que celle de la Terre. Avec notre mesure précédente on trouve :

$$m_{Lune} = \frac{M_{Terre}}{81} = \frac{5{,}96 \times 10^{24}}{81} = 7{,}358 \times 10^{22}\, kg$$

La masse du Soleil et des planètes

Le principe est toujours le même : 1) on mesure la période T d'un petit corps ($m << M$) qui gravite autour de l'objet dont on veut déterminer la masse M. 2) Si la distance de l'objet est connue, on détermine le demi grand axe a de l'orbite du petit corps. 3) On applique la loi de Kepler – Newton

Avec un tableur, nous avons recalculé la masse des planètes, à l'exception de mercure et Vénus pour lesquels la méthode ne s'applique pas puisque ces deux planètes n'ont pas de satellite naturel ; leur masse est déterminée par les perturbations des trajectoires d'autres corps (petites planètes, satellites artificiels…).

Corps étudié NOM	Corps gravitant de masse *m<<M* nom	demi gd-axe *a*	Période T	Corps étudié Masse	Rayon	densité
		mètres	secondes	kilogrammes	mètres	
SOLEIL	**Terre+Lune**	1,49599E+11	3,15576E+07	1,99E+30	6,960E+08	1,4
MERCURE	**?**			3,30E+23	2,439E+06	5,4
VENUS	**?**			4,87E+24	6,050E+06	5,3
TERRE+LUNE	**Lune**	3,84400E+08	2,36059E+06	6,03E+24	6,368E+06	5,6
MARS	**Deimos**	2,34590E+07	1,09123E+05	6,42E+23	3,397E+06	3,9
JUPITER	**Ganymède**	1,07000E+09	6,18192E+05	1,90E+27	6,900E+07	1,4
SATURNE	**Encelade**	2,38020E+08	1,18368E+05	5,70E+26	5,700E+07	0,7
URANUS	**Miranda**	1,29800E+08	1,22083E+05	8,68E+25	2,500E+07	1,3
NEPTUNE	**Naiad**	4,80000E+07	2,55744E+04	1,00E+26	2,400E+07	1,7

Remarques :

À partir de Jupiter la densité des planètes est faible. Ce sont les planètes joviennes.

Les autres sont dites telluriques.

La planète Saturne est moins dense que l'eau. Elle flotterait !

Application à la masse des étoiles doubles

Si on parvient à enregistrer les mouvements individuels de deux étoiles en orbite l'une autour de l'autre et si la distance de ce couple est connue, alors on tire directement les valeurs *a*1 et *a*2. On utilise la relation de Kepler-Newton et la définition du centre de gravité. On a alors deux équations à deux inconnus, que l'on peut résoudre :

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \qquad (18)$$

On en tire les masses de chacune des étoiles. Il est important de signaler que c'était jusqu'à présent la seule façon d'obtenir les masses des étoiles. Les choses vont changer grâce à l'observation des premières exoplanètes.

L'effet de marée

Jusqu'à présent nous avons considéré que les corps qui s'attiraient étaient petits par rapport à leur distance respective. Qu'en est-il si cette condition n'est pas remplie ? Puisque la loi d'attraction dépend fortement de la distance, le bord le plus proche de l'autre corps (que nous supposerons être le plus massif) sera plus attiré que le bord le plus éloigné (voir la Figure 4). Le corps en question sera déformé.

Nous allons considérer deux corps. L'un très gros et peu déformable. L'autre plus petit et plus déformable. C'est ce dernier qui sera sujet à l'effet de marée. Naturellement, dans la réalité les deux corps sont susceptibles de s'influencer mutuellement. Peut-on prévoir comment va se faire la déformation du petit corps ? Il suffit de se placer dans un repère attaché au centre du corps déformé (celui de droite sur la figure 4). Le bord A ressentira par rapport au centre une force F_A-F_{centre} en direction du corps attracteur, car F_A est supérieur à F_{centre}. Au centre la force sera nulle. Le bord B ressentira une force F_B-F_{centre} en direction opposée à celle du corps attracteur car F_B est inférieur à F_{centre}. Le corps va s'étirer le long de la ligne des centres.

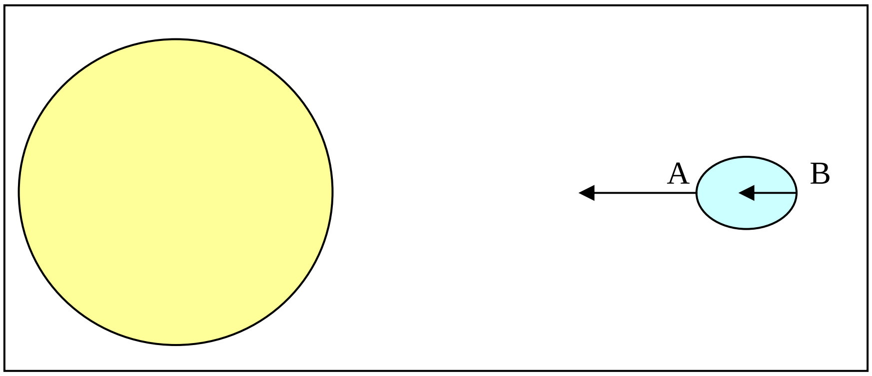

Figure 4 : L'effet de marée est un effet différentiel de l'attraction

Si le corps sujet à l'effet de marée est assez rigide, il se déformera peu. C'est ce qui se passe avec la croûte terrestre. La déformation est de quelques dizaines de centimètres. Mais si le corps est composé de parties peu rigides, cette partie fluide subira la déformation. C'est ce qui se passe avec les océans et aussi avec l'atmosphère terrestre. Le niveau de certaines mers peut varier de plusieurs mètres.

Dans le cas de la Terre il y a deux corps attracteurs : la Lune et le Soleil. La Lune est moins massive mais tellement plus proche qu'elle donne l'effet principal. Si le Soleil et la Lune combinent leurs effets (lors de la nouvelle lune ou de la pleine lune) la déformation est maximale. C'est la périodes des vives-eaux (Figure 5, à gauche). Si, au contraire, les effets se contrarient (lors du premier quartier ou du dernier quartier) la déformation est atténuée. C'est la périodes des mortes-eaux (Figure 5, à droite).

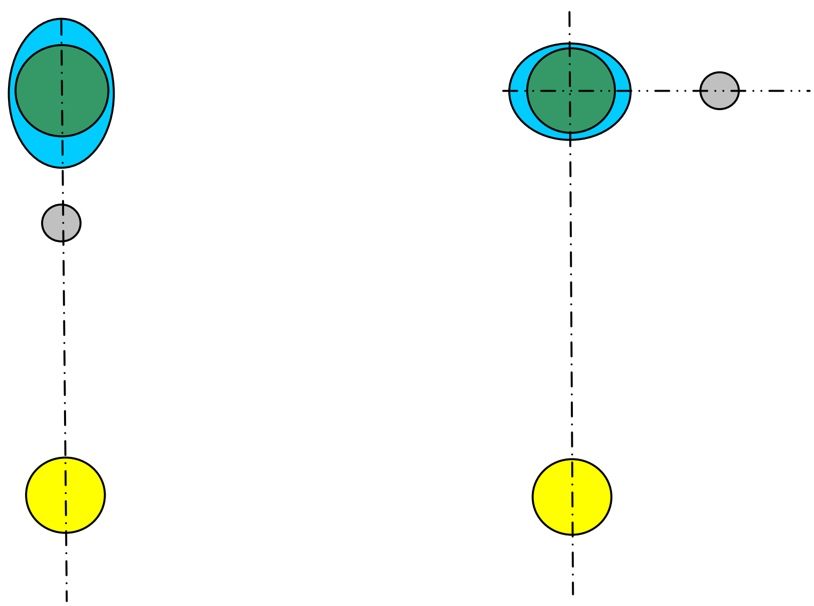

Figure 5 : Les effets combinés de la Lune (en gris) et du Soleil (en jaune)

Considérons pour simplifier la contribution de la Lune seule. Il se produit un double renflement des eaux, donc environ deux marées hautes par jour. A cause de la rotation, ce double renflement constitue une vague qui parcoure la Terre. Mais, les eaux ne circulent pas librement à cause de la configuration du relief. Il apparaît donc une force de frottement qui s'oppose à la rotation de la Terre. La Terre ralentit très faiblement (0,002 s par siècle).

L'effet de marée est omniprésent en astrophysique, que ce soit entre les étoiles ou entre les galaxies. Pour les étoiles et les planètes, si la différence d'attraction entre les deux bords dépasse la force de cohésion du corps, celui-ci peut se désintégrer. C'est ce qui est arrivé à la comète Shoemaker-Levy qui s'est désintégrée dans le champ de gravitation de Jupiter. Pour les galaxies, les effets de marée contribuent à stimuler la formation stellaire et à donner les structures spirales.

Energie et vitesse de libération

Quand une force agit sur un corps pour modifier son état (mise en mouvement, accélération, ralentissement, déviation, etc.…), elle travaille. Le travail fourni se mesure par le produit de la force par le déplacement. En toute rigueur, la force peut varier avec la position, comme c'est le

cas pour la gravitation. On doit alors utiliser une intégrale pour calculer le travail effectué pour un déplacement donné. On comprend au passage que Newton ait eu besoin d'inventer ce type de calcul (c'était vrai aussi pour les démonstrations données dans les Encadrés).
L'expression du petit travail élémentaire *dW* fourni pour un déplacement élémentaire *dr* est :

$$dW = F(r)dr \qquad (19)$$

Pour un déplacement de r_1 à r_2, le travail fourni sera :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr \qquad (20)$$

Pour l'action d'un corps sur un autre par gravitation (par exemple l'attraction par la Terre de masse *M* et d'un petit caillou de masse *m*), nous aurons donc :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{Mm}{r^2}dr = -G\frac{Mm}{r_2} + G\frac{Mm}{r_1} \qquad (21)$$

Ce travail ne sera pas perdu pour le système Terre-caillou, il sera sous une forme différente, par exemple sous forme de vitesse. On dira que le caillou a acquis de "l'énergie" cinétique. Travail et Energie sont deux aspects d'une même chose, d'ailleurs assez mystérieuse, comme l'était la masse[4]. L'énergie du caillou, d'une énergie gravitationnelle potentielle, est devenue une énergie cinétique (mais le système Terre-Caillou a toujours la même énergie globale). Le caillou est toujours considéré comme appartenant à la Terre et à sa sphère d'action.

On considère que l'attraction gravitationnelle a une portée infinie. Il semble donc impossible de quitter l'appartenance à la sphère d'action de la Terre. En pratique c'est possible, si on va suffisamment loin pour que l'action de la Terre soit négligeable devant celle éventuellement fournie par d'autres corps.

Nous allons calculer la vitesse que le caillou devrait prendre pour se libérer, à coup sûr, de l'attraction terrestre. Il faut avant tout définir l'énergie cinétique d'une masse en mouvement. Nous allons le faire dans le cas particulier de la gravitation, mais la formule sera valable partout en mécanique newtonienne. Si un poids *mg* tombe, sans vitesse initiale, d'une petite hauteur *h*, assez petite pour que la variation de *g* soit négligeable, le travail fourni sera *mg h*. Ce travail va se retrouver sous forme d'énergie cinétique. L'énergie cinétique E_c se mesurera donc par cette même valeur $E_{c=}$ *mgh*. Or nous savons que *h* est liée à la vitesse de chute (voir relation E1-4) :

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{g} = \frac{v^2}{2g}$$

Reportons cette valeur dans l'expression de E_c, et nous trouvons :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2} \qquad (22)$$

[4] Ces deux concepts mystérieux de masse et d'énergie seront réunis par la physique moderne en une seule et même entité.

Telle est l'expression de l'énergie cinétique. Revenons à notre problème. Si nous communiquons au caillou une vitesse suffisante pour qu'il puisse aller à l'infini, il pourra se considérer comme libre de l'attraction de la Terre. La relation 21 nous montre que pour passer de la surface de la Terre, c'est-à-dire à la distance $r_1=R$ (R étant le rayon de la Terre) à la distance infinie r_2, il faudra fournir un travail (c'est-à-dire une énergie) :

$$W = G\frac{Mm}{R}$$

On doit donc fournir un vitesse telle que :

$$G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2$$

C'est-à-dire, que la vitesse d'évasion est :

$$\boxed{v = \sqrt{2\frac{GM}{R}}} \qquad (23)$$

Cette. On peut trouver la température qui permet l'évasion d'un atome ou d'une molécule, en écrivant que l'énergie cinétique est égale à $3/2kT$, où k est la constante de Boltzmann.

Exercice : Vitesse d'évasion de l'oxygène de l'air. En appliquant la relation 23 et avec les valeurs numériques prises dans la littérature, calculer la vitesse de libération d'un atome d'hydrogène pour la Terre. Quelle température est nécessaire pour atteindre cette vitesse ?
Faire le même calcul pour Mercure et la Lune.
(Rép. : 11 200 m/s ; 5043 K - 4240 m/s ; 725 K - 2,38 m/s ; 228 K)

Conclusion

La gravitation Newtonienne semble bien vérifiée jusqu'aux distances stellaires… Cependant, quand le champ gravitationnel est très fort (ou très faible), est-elle encore correcte ? La réponse est non !
La théorie de la Relativité Générale d'Einstein a résolu le problème dans le cas des champs gravitationnels forts (cas de l'anomalie de Mercure). Dans cette nouvelle description de la gravitation, la courbure de l'espace temps remplace les forces. Chaque masse suit librement une trajectoire complètement déterminée par la courbure induite par la distribution des masses.
Si nous appliquons encore la troisième loi de Kepler pour déduire la masse des galaxies, la loi de Newton semble encore être mise en défaut, dans les régions où le champ est très faible.